Cálculo Diferencial e Integral

Curso rápido

ANA SCARDINO

2017

ANA MARIA DOS SANTOS SCARDINO

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Curso Rápido

1ª edição

São Paulo

Edição do autor

2017

Dedico este livro aos grandes nomes da matemática, sejam homens ou mulheres. E a todos que consideram o conhecimento como uma evolução e melhoria da condição humana. Dedico, também, ao meu filho Ian G. Scardino, pela colaboração na elaboração do livro.

"UM PROFESSOR AFETA A ETERNIDADE .
É IMPOSSÍVEL DIZER ATÉ ONDE VAI SUA INFLUÊNCIA."

HENRY ADAMS

Capítulo 1

1. LIMITES

1.1. LIMITES FINITOS.

Dizer que o limite de uma função y = f(x) em um ponto p é um número L, é afirmar que, à medida que x se aproxima de p, os valores da função aproximam-se do nº L. Determinar o limite é verificar o comportamento da função quando x está próximo de um ponto p.

Para determinar o comportamento das funções, podemos construir tabelas de valores que se aproximam à esquerda e à direita do ponto x, procurando concluir para que valor a expressão converge.

O estudo do comportamento da função nas vizinhanças do ponto p chama-se limite da função quando x tende a p e indica-se por

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

Exemplos:

a) Como se comportam os valores da função y = 3x + 1 quando x se aproxima do ponto x=2

À esquerda do ponto x=2

$x < 2$	y
1	6,7
1,9	6,97
1,99	6,997
1,999	6,9997
↓ 2	↓ 7

À direita do ponto x=2

$x > 2$	y
3	10
2,1	7,3
2,01	7,03
2,001	7,003
2,0001	7,0003
↓ 2	↓ 7

Portanto o $\lim_{x\to 2} 3x + 1 = 7$

b) Qual o limite da função y = $\frac{x^2-4}{x-2}$, quando x tende a 2?

À esquerda do ponto x=2

$x < 2$	y
1	3
1,9	3,9
1,99	3,99
1,999	3,999
1,9999	3,9999
↓ 2	↓ 4

À direita do ponto x=2

$x > 2$	y
3	5
2,1	4,1
2,01	4,01
2,001	4,001
2,0001	4,0001
↓ 2	↓ 4

Outra forma de resolver:

Lembrando-se do produto notável: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x + 2 = 4$

Vamos relembrar alguns produtos notáveis úteis:

PRODUTOS NOTÁVEIS

1. Quadrado da soma de dois termos

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

2. Quadrado da diferença de dois termos

$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

3. Diferença de potências (ordem 2)

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

4. Cubo da soma de dois termos

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

5. Cubo da diferença de dois termos

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

6. Soma de dois cubos na forma fatorada

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

7. Diferença de dois cubos na forma fatorada

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Exemplos:

Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} x+3 = 6$$

b) $\lim_{x\to 8} \frac{x^2-10x+16}{x-8}$

$$\lim_{x\to 8} \frac{x^2-10x+16}{x-8} = \lim_{x\to 8} \frac{(x-2)(x-8)}{x-8} = \lim_{x\to 8} x-2 = 6$$

Obs. O polinômio de 2º grau pode ser fatorado na forma:

$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$

c) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3}$

Aplicando o produto notável 7.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=\lim_{x\to 3}3^2+3.3+9$$
$$=27$$

d) $\lim_{x\to 14}\frac{\sqrt{x+2}-4}{x-14}$

Aplicando o produtor notável 3., podemos eliminar o radical, multiplicando a expressão pelo conjugado:

$$\lim_{x\to 14}\frac{\sqrt{x+2}-4}{x-14}=\lim_{x\to 14}\frac{\left(\sqrt{x+2}-4\right)\left(\sqrt{x+2}+4\right)}{(x-14)\left(\sqrt{x+2}+4\right)}$$
$$=\lim_{x\to 14}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-4^2}{(x-14)\left(\sqrt{x+2}+4\right)}$$
$$=\lim_{x\to 14}\frac{x-14}{(x-14)\sqrt{x+2}+4}=\frac{1}{8}$$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+4x}{x}$

Colocando x em evidência:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(2x+4)}{x}=\lim_{x\to 0}2x+4=4$$

EXERCÍCIOS

1.1. Calcular os limites:

a) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

c) $\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{2x^2}{3x}$

Respostas: a) $\frac{-3}{2}$; $b)$ 1; $c) \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

ATIVIDADE

1.1. Calcule os limites, algebricamente:

a) $\lim_{x \to -4} \frac{x^2-16}{x+4}$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2}$

c) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$

d) $\lim_{x \to -1} \frac{(\sqrt{x+2}-1)}{(x+1)}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-x}{x}$

f) $\lim_{x \to 2} \frac{-5x^2+20}{x-2}$

g) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-4x-5}{x^2-3x-4}$

LISTA DE EXERCÍCIOS

1.1. Calcular os limites abaixo com o auxílio de uma tabela de valores:

a) $\lim_{x \to 0} 2x + 4$

b) $\lim_{x \to -2} \frac{x+2}{x+1}$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-6x+8}{x-2}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

1.2. Calcular os limites abaixo utilizando o método da fatoração.

a) $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x-2}$

c) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-7x+10}{x-5}$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-12}{x-2}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{12x+3x^2}{x}$

f) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$

g) $\lim_{x\to 6} \frac{x^2-2x-24}{x-6}$

h) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$

i) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x-3}$

j) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

k) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

l) $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$

m) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-4x-5}{x^2-3x-4}$

1.2. LIMITES LATERAIS E FUNÇÕES CONTÍNUAS.

Pode ocorrer que os limites à esquerda e à direita do ponto x=p, forneçam valores distintos. Nesse caso, esses valores são os ***limites laterais***.

Entretanto o limite no ponto não existe.

Exemplo: Seja a função y=$\sqrt{x}$,

Pelo lado esquerdo a função nem pode ser calculada, pois não existe raiz de número negativo. Nesse caso o limite lateral quando x tende a zero pela esquerda não existe. Pelo lado direito a raiz tende a zero. O que existe é somente o limite lateral direito. Portanto

$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \nexists$

À esquerda do ponto x= 0

x	*y*
-1	$\nexists$
-0,1	
-0,01	
-0,001	
-0,0001	
↓ 0	$\nexists$

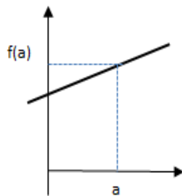
À direita do ponto x=0

x	y
1	1
0,1	0,32
0,01	0,10
0,001	0,032
0,0001	0,010
0,00001	0,0032
↓ 0	↓ 0

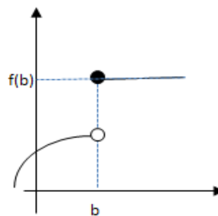
FUNÇÕES CONTÍNUAS.

Consideremos o gráfico das funções abaixo:

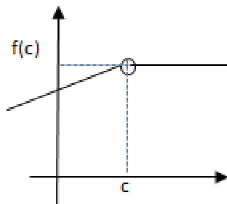
a) $f_{(1)}$



b) $f_{(2)}$



c) $f_{(3)}$



Se uma função tem limite em um ponto p e, além disso, é possível calcular o valor dessa função no ponto e o valor coincide com o limite, dizemos que a função é contínua nesse ponto.

A função f_1 é contínua no ponto a

As funções f_2 e f_3 são descontínuas no ponto b e c, respectivamente.

Os pontos b e c são chamados ponto de descontinuidade da função.

Resumindo: Para que uma função seja contínua em x=p do seu domínio, devem ser satisfeitas as seguintes condições:

a) Existe f(p)

b) Existe $\lim_{x \to p} f(x)$

c) $\lim_{x \to p} f(x)$=f(p)

Exemplos:

a) Verificar se a função f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$ é contínua em x=3.

Resposta

- *f (x)* = $\frac{3^2-4}{3-2} = 5$
- $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$
- *f (x)* = $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$

Portanto, a função é contínua no ponto x = 3.

b) Verificar se a função f(x) = $\frac{x^2-4}{x-2}$ é contínua em x=2.

Resposta

- *f (x)* = $\frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0} = indeterminação$.

- $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$
- $f(x) \neq \lim_{x \to 2} f(x)$

Portanto, f(x) não é contínua no ponto x = 2.

c) Supor que a cobrança em um estacionamento comece com um valor de R$5,00 na primeira hora, e aumente R$2,00 a cada hora. Um possível modelo que descreve o custo do estacionamento em função do tempo é:

$$y = \begin{cases} 5{,}00 \ se \ 0 \leq x < 1 \\ 7{,}00 \ se \ 1 \leq x < 2 \\ 9{,}00 \ se \ 2 \leq x < 3 \\ etc \end{cases}$$

A função é descontínua nos pontos p=1, p=2, p=3, etc., pois não existe o limite da função f(x) nos pontos p =1, p=2, p=3, etc.

EXERCÍCIOS

1.2. Verificar a continuidade das funções:

a) $y = \frac{3x+9}{x+3}$ no ponto x=2

b) f(x) = $\begin{cases} 2x + 1, se \ x \neq 1 \\ 4, se \ x = 1 \end{cases}$ no ponto x=1

c) f(x) = $\begin{cases} 2x^2 - 4, se \ x < 2 \\ 4 - 2x, se \ x \geq 2 \end{cases}$ no ponto x=2

Respostas:

a) É contínua. *b) Não é contínua.* *c) Não é contínua.*

ATIVIDADE

1.2. Verificar se a função é contínua no ponto x=2

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 3x - 4, se\ x < 2 \\ x^2 + 4, se\ x \geq 2 \end{Bmatrix}$$

1.3. Verificar a continuidade da função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, se\ x < 2 \\ 7 - 2x\ se\ x \geq 2 \end{cases}$ no ponto x = 2

LISTA DE EXERCÍCIOS

1.3. Verificar a continuidade das funções:

a) *f (x)* = 4x + 1 no ponto x = 1

b) *f (x)* = $\begin{cases} 2x + 3, se\ x \neq 1 \\ 4, se\ x = 1 \end{cases}$ no ponto x = 1

c) *f (x)* = $\begin{cases} x - 3,\ se\ x \leq 1 \\ 1 - x, se\ x > 1 \end{cases}$ no ponto x = 1

1.3. LIMITES INFINITOS E PARA X TENDENDO AO INFINITO.

Pode ocorrer que à medida que x se aproxima de um ponto p, os valores de y = f(x) tornam-se muito grandes, acompanhados dos sinais positivo ou negativo.

Exemplos:

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2+1}{x-3}$

$x < 3$	y
2	-5
2,9	-94,1
2,99	-994,1
2,999	-9994,001
↓ 3	↓ -∞

$x > 3$	y
4	17
3,1	106,1
3,01	1.006,01
3.001	10.006,001
↓	↓
3	∞

Verifica-se que nesse caso, o limite à esquerda é menos infinito e à direita é mais infinito, pois os valores tendem a decrescer sempre do lado esquerdo e, a crescer infinitamente do lado direito.

O limite no ponto x = 3 não existe, uma vez que os limites laterais não são iguais. Portanto a função não é contínua no ponto x = 3.

b) $\lim_{x \to 0} \frac{5+x}{x^2}$

À esquerda

X	y
-1	4
-0,1	490
-0,01	49.900
-0,001	4.999.000
↓ 0	↓ ∞

À direita

x	y
1	6
0,1	510
0,01	50.100
0,001	5.001.000
↓ 0	↓ ∞

Logo, $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$, pois os limites laterais coincidem.

A função não é contínua no ponto x = 0, pois nem é definida neste ponto.

ATIVIDADE

1.4. Determine, caso exista, o $\lim_{x \to 3} \frac{x^2+1}{x-3}$

1.4. FUNÇÃO INVERSA.

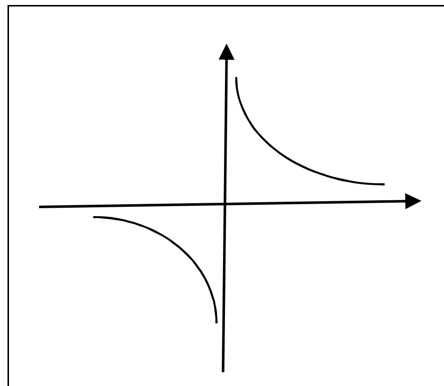
Vamos estudar agora uma função muito importante que representa bem um conjunto de várias outras funções, para o caso de o limite ser infinito ou x tender a infinito.

Seja a função f(x) = $\frac{1}{x}$

Esta função tem como gráfico a hipérbole equilátera cujas assíntotas, neste caso, são os eixos coordenados Ox e OY.

Para estudá-la, vamos construir inicialmente seu gráfico:

X	Y
-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
0	$\nexists$
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$



Pode-se observar que:

Quando x se aproxima de zero, pela esquerda, y decresce indefinidamente, tendendo a -∞

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Quando x se aproxima de zero pela direita, y cresce indefinidamente, tendendo a ∞

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Ainda, a partir do mesmo gráfico, pode-se verificar que quando x cresce indefinidamente, a curva tende a encostar no eixo x, tendendo a zero

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Quando x decresce indefinidamente, a curva tende a encostar no eixo x, tendendo a zero também.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Podemos generalizar que $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, se n∈N* e se f:R*→R*

Exemplos:

Calcule:

a) $\lim_{x\to \infty} \frac{3}{x}$

Resposta. $\lim_{x\to \infty} \frac{3}{x} = \lim_{x\to \infty} 3.\frac{1}{x} = 3.0 = 0$

b) $\lim_{x\to 0_+} \left(\frac{3}{x}\right)$

Resposta. $\lim_{x\to 0_+} \left(\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to 0_+} 3.\frac{1}{x} = 3.\infty = \infty$

EXERCÍCIOS

1.3. Determine os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0_-} \left(\frac{9}{x}\right)$

b) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}\right)$

c) $\lim_{x\to0_-}\left(\frac{-5}{x}\right)$

d) $\lim_{x\to0_+}\left(\frac{1000}{x^2}\right)$

e) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x^2}\right)$

Respostas:

a) -∞; $b)$ 0; $c)$ ∞; $d)$ ∞; $e)$0.

ATIVIDADE

1.5. Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{7+x}{x^2}$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{10}{x}$

c) $\lim_{x\to0_+}\left(\frac{3}{x}\right)$

d) $\lim_{x\to0_-}\left(\frac{9}{x}\right)$

LISTA DE EXERCÍCIOS

1.4. Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x}\right)$

b) $\lim_{x\to0_+}\left(\frac{5}{x^2}\right)$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^2}\right)$

d) $\lim_{x\to0_-}\left(\frac{-5}{x}\right)$

1.5. PROPRIEDADES DOS LIMITES.

- LIMITE DE UMA CONSTANTE

$\lim_{x \to xo} k$= k

Exemplo: $\lim_{x \to 2} 3$= 3

- LIMITE DA SOMA E DA DIFERENÇA

$\lim_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)]$=$\lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$

Exemplos:

a) $\lim_{x \to 2} x + 3$=$\lim_{x \to 2} x$ + $\lim_{x \to 2} 3$=2+3=5

b) $\lim_{x \to 2} 4x - 3$=$\lim_{x \to 2} 4x - \lim_{x \to 2} 3$ =8-3=5

- LIMITE DO PRODUTO

$\lim_{x \to x_0}[f(x). g(x)]$=$\lim_{x \to x_0} f(x). \lim_{x \to x_0} g(x)$

Exemplo:

$\lim_{x \to 3} 4x^2$=$\lim_{x \to 3} 4$. $\lim_{x \to 3} x^2$=4.9=36

- LIMITE DO QUOCIENTE

$\lim_{x \to x_0}[f(x)/g(x)]$=$\lim_{x \to x_0} f(x)/ \lim_{x \to x_0} g(x)$

Exemplo:

$\lim_{x \to 2} \frac{(x+3)}{(x+4)}$ = $\frac{\lim_{x \to 2} x+3}{\lim_{x \to 2} x+4}$ = $\frac{5}{6}$

- LIMITE DE UMA POTÊNCIA

$\lim_{x \to x_0}[f(x)]^n$= $\left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^n$

Exemplo:

$\lim_{x \to 1}(3x)^2$= = $[\lim_{x \to 1} 3x]^2$ = $3^2 = 9$

- LIMITE DE UMA RAIZ

$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)}$

Exemplo:

$\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{2x^2} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 2} 2x^2} = \sqrt[3]{8}$

- LIMITE DA FUNÇÃO COMPOSTA

Sabendo que $\lim_{x \to k} g\left(f(x)\right) = g(\lim_{x \to k} f(x))$

Exemplo:

$\lim_{x \to 10} \log 100x = \log\,[\lim_{x \to 10} 100x] = 3$

1.6. LIMITE DA FUNÇÃO POLINOMIAL PARA X TENDENDO A MAIS OU MENOS INFINITO.

Considere a função polinomial, de grau n, com $a_n \neq 0$

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...a_1 x + a_0$

Colocando x^n em evidência, temos:

$f(x) = x^n (a_n + a_{n-1}x^{-1} + ...+a_1 x^{-n+1} + a_0 x^{-n})$

Fazendo o limite

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^n(a^n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n})$ (cada fração → 0)

$= \lim_{x \to \pm\infty} x^n(a^n) = \lim_{x \to \pm\infty} a^n x^n = \pm\infty$

Conforme a paridade de n e o sinal de a_n, teremos limites iguais a mais infinito ou menos infinito.

Exemplos:

1) Dada a função f(x) = $4x^3 + 2x^2 - 3x - 2$, calcular:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

Resp.

$$\lim_{x\to\infty} 4x^3 + 2x^2 - 3x - 2 \;=\; \lim_{X\to\infty} 4x^3 \;=\; \infty$$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

*R*esp.

$$\lim_{x\to-\infty} 4x^3 + 2x^2 - 3x - 2 \;=\; \lim_{X\to-\infty} 4x^3 \;=\; -\infty$$

Obs. Limites do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ deve-se dividir o numerador e o denominador pela maior potência de x:

2) Dada a função f(x) = $\frac{3x^2-2x+1}{5x^2+3x-5}$, calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(5+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2})} = \lim_{X\to\infty} \frac{3x^2}{5x^2} = \frac{3}{5}$$

3) Calcular $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x+3}$ –x.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x+3} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x+3.} - x).(\sqrt{x^2+2x+3}) + x)}{\sqrt{x^2+2x+3}) + x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}) + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} + \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2x} = 1.$$

ATIVIDADE

1.6. Calcular:

a) $\lim_{x\to-\infty} 2x^3 - 4x^2 - 3x + 1$

b) $\lim_{x\to\infty} 5x - 1$

c) $\lim_{x\to\infty} 2x^6 + x^3 - x + 4$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{4x^2 + x - 1}$

e) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 1}}$

LISTA DE EXERCÍCIOS

1.5. Calcular os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to\infty} -2x + 1$
b) $\lim_{x\to-\infty} -2x + 1$
c) $\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3 + \sqrt{2}\right)$
d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3 - 3x^2 + x - 1}{x - 2}$
e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-2 + 3x + x^2}{3 + 5x + 2x^3}$
f) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x - 1}{4x + 2}$
g) $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x + 2}{x^2 - 3x + 7}$
h) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2 - 1}{6x + 1}$
i) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^3 - x^2 + x - 1}$
j) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{6x - 1}{2x + 3}\right)^2$

1.7. LIMITE DE UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL.

Antes de estudarmos o comportamento da função exponencial, citamos um exemplo corriqueiro de aplicação deste tipo de função:

Suponha um recipiente onde seja colocada uma bactéria, que se desenvolve dando origem a duas. As duas se desenvolvem e dão origem a outras quatro. O número de bactérias duplica de minuto em minuto. Sabemos que a primeira bactéria foi colocada no recipiente ao meio dia e que o recipiente se encheu pela metade em quatro horas. A que horas o recipiente estará cheio?

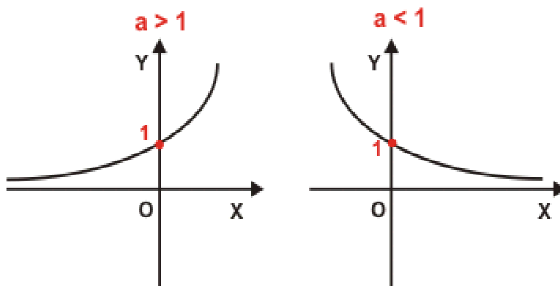
Muitas vezes tendemos a responder 8 horas, dentro de uma lógica linear. No caso, basta mais um minuto para que a quantidade de bactérias duplique e o recipiente fique cheio.

Ao estudar as funções exponenciais verificamos que elas são típicas para representar crescimentos populacionais.

A função exponencial é do tipo $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Como exemplo, temos a função exponencial $y = 2^x$ ou a função $y = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$.

Considerando o coeficiente $a > 1$, teremos a exponencial crescente, e se $0 < a < 1$, teremos a exponencial decrescente:



Uma aplicação da exponencial crescente seria a função que fornece o número de bactérias presentes (salmonela) em uma maionese deteriorada x horas após ser servida, do tipo y = $200.2^{\frac{2x}{3}}$; e uma aplicação da exponencial decrescente seria a lei do decaimento radioativo, onde o número de núcleos radioativos restantes em uma amostra é dada por $N = N_0\, e^{-\lambda t}$. Abaixo, transcrevo um trecho de um artigo, que mostra a utilização de uma função exponencial decrescente.

"Datação por carbono-14"

Quando o nitrogênio, na parte superior da atmosfera da terra, é bombardeado pelos raios cósmicos, o elemento carbono-14 radioativo é produzido. Esse carbono-14 combina-se com o oxigênio para formar o dióxido de carbono, o qual é ingerido pelas plantas, que por sua vez, são comidas pelos animais. Desta maneira, todas as plantas e os animais vivos absorvem quantidades de carbono-14 radioativo. Em 1947, o cientista nuclear americano W.F.Libby propôs a teoria que a porcentagem de carbono-14 na atmosfera e em tecidos vivos de plantas é a mesma. Quando uma planta ou um animal morre, o carbono–14 no tecido começa a decair. Assim, a idade de um artefato que contenha material animal ou vegetal pode ser estimada determinando qual a porcentagem que resta do seu

conteúdo de carbono-14 original. Vários procedimentos chamados datação por carbono ou datação por carbono-14 foram desenvolvidos para medir esta porcentagem.

Em 1988, o Vaticano autorizou o Museu Britânico a datar a relíquia de pano conhecida como Sudário de Turim, possivelmente o sudário de Jesus de Nazaré. Este pano, que apareceu em 1356, contém o negativo da imagem de um corpo humano que se acreditava no mundo inteiro ser o de Jesus. O relatório do Museu Britânico mostrou que as fibras no pano continham entre 92 e 93 % do carbono-14 original.”

Retirado do livro Anton, Howard; Cálculo – um novo horizonte, 6ª ed., Porto Alegre, vol.2-Bookman,2000.

Usando essa informação e tendo o valor da constante de desintegração, podemos calcular o número de anos da existência do Sudário:

$N = N_0 \, e^{-\lambda t}$ ou

$y = y_0 e^{-0{,}000121t}$

Sendo $\frac{y}{y_0} = 0{,}92$ temos

$0{,}92 = e^{-0{,}000121t}$

Aplicando logaritmo em ambos os lados:

$\ln 0{,}92 = -0{,}000121t.\ln e$

$t = \frac{\ln 0{,}92}{-0{,}000121}$

$t \approx 689.$

Portanto, segundo esta teoria a idade do Sudário estava perto de 689 anos, colocando sua origem próxima ao ano de 1299.

ATIVIDADE

1.7. Resolver:

a) $\lim_{x\to\infty} 2^x$
b) $\lim_{x\to-\infty} 2^x$
c) $\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2})^x$
d) $\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{2})^x$

1.8. LIMITE FUNDAMENTAL EXPONECIAL E O NÚMERO DE EULER.

O número e = 2,718281828459045...é um número irracional, cuja utilização em cálculos com potência e logaritmos tem origem nos trabalhos de Napier e Briggs, no início do século XVII. Esse número é muito utilizado em processos de crescimento ou decrescimento. Particularmente a função e^x, exponencial de base *e*, descreve vários fenômenos da natureza, como o decaimento radioativo de alguns elementos, a propagação de moléstias, o crescimento das populações, e o cálculo de juros, que tomaremos como exemplo, para tentar entender o aparecimento do número *e*.

Seja um capital inicial C_0, aplicado a uma taxa de juros simples de 100% a.a., por 1 ano.

Depois de um ano teremos: $C_1 = C_0 + 100\% \, C_0 = 2\, C_0$

Vamos agora trabalhar no regime de juros compostos, mas considerando a incorporação dos juros em períodos diferentes.

- Comecemos com o período n = 2 e taxa semestral = $\frac{100}{2} = 50\%$ a.s.

No final de 1 semestre $C_{1/2} = C_0 + 50\%C_0 = C_0(1+ 1/2)$

No final de 2 semestres: $C_1 = C_{1/2} + 50\% C_{1/2} = C_{1/2}(1 + 1/2) = C_0(1 + 1/2)(1 + 1/2) = C_0(1 + 1/2)^2 = 2,25C_0$

- Para o período n = 4 e taxa trimestral = $\frac{100}{4} = 25\%$ a.t.

$C_{1/4} = C_0 + 25\%C_0 = C_0(1 + ¼)$
$C_{2/4} = C_{1/4} + 25\%C_{1/4} = C_{1/4} (1 + 1/4) = C_0(1 + 1/4)_2$
....
$C_{4/4} = C_0(1 + 1/4)^4 = 2,44C_0$

- Para um período n = 12 e taxa mensal = $\frac{100}{12}$ %

$C_1 = C_0(1 + 1/12)^{12} = 2,613C_0$

- Para um período n= 365 dias e taxa diária = $\frac{100}{365}$ %

$C_1 = C_0(1 + 1/365)^{365} = 2,714C_0$
....

Generalizando $C_1 = C_0 (1 + 1/n)^n$

Vejamos como fica o valor da expressão $(1 + 1/n)^n$, para n grande

n	$(1 + 1/n)^n$
1.000	2,7169239
5.000	2,7180101
10.000	2,7181459
50.000	2,7182546
100.000	2,7182682
1.000.000	2,7182805

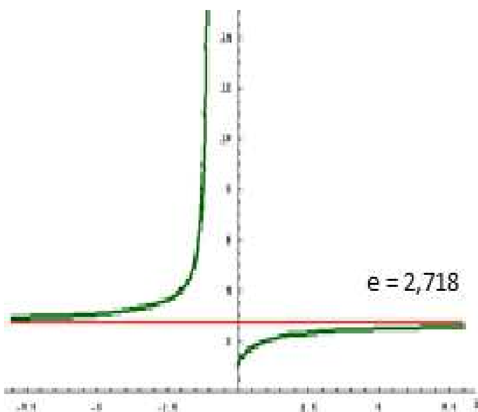
Como podemos observar o nº $(1 + 1/n)^n$ se aproxima de um valor aproximadamente fixo igual a 2,718, que é representado pelo nº *e*.

Se considerarmos o mesmo raciocínio para uma taxa i $\neq$ 100%, obteríamos a seguinte fórmula : $C_1 = C_0.e^i$

E para o cálculo ao fim de t anos: $C_t = C_0.e^{it}$.

Façamos, agora, um estudo do comportamento da função $y = (1 + \frac{1}{x})^x$

D =] -∞,-1 [∪] 0, ∞ [, tais que $(1 + \frac{1}{x}) > 0$



Ou seja, o **limite fundamental exponencial** pode ser escrito como:

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$, onde x é um número natural.

A partir do limite fundamental, podemos resolver vários outros limites:

Exemplos

a) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{2x} = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x})^x]^2 = e^2$

b) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{3x})^x = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{\frac{u}{3}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{\frac{u}{3}} =$
$\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{u})^u]^{1/3} = e^{1/3}$

$$\begin{Bmatrix} 3x = u \\ x = \frac{u}{3} \end{Bmatrix}$$

ATIVIDADE

1.8. Resolver:

a) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{4x}$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{x}\right)^x$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+a}$, $onde\ a =$
$constante\ , pertencente\ ao\ conjunto\ dos\ reais.$

LISTA DE EXERCÍCIOS

1.8. Calcule:

a) $\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x}$

b) $\lim_{n \to 0} (1 + n)^{\frac{1}{n}}$

c) $\lim_{n \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}n}$

d) $\lim_{n \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{4}{3}n}$

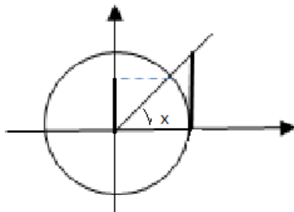
e) $\lim_{n \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n}$

1.9. LIMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL.

Considere a função f(x) = $\frac{senx}{x}$, definida em R - $\{0\}$.

Para calcular o limite da função quando x tende a zero, vamos lembrar que:

a) Para 0 <x < 90°



$$senx < x < tgx$$

Dividindo-se por *senx*

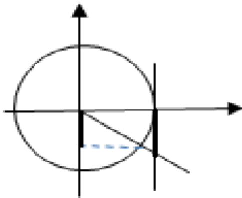
$$1 < \frac{x}{senx} < \frac{senx/cosx}{senx}$$

$$1 < \frac{x}{senx} < \frac{1}{cosx}$$

Invertendo:

$$1 > \frac{senx}{x} > cosx$$

b) Para $\frac{-\pi}{2} < x < 0$



$$tgx < x < senx$$

$$\frac{senx}{cosx} < x < senx$$

$$tgx < x < senx$$

Invertendo:

$$\frac{cosx}{senx} > \frac{1}{x} > \frac{1}{senx}$$

Multiplicando por *senx*:

(lembrando que *senx* < 0)

$$cosx < \frac{senx}{x} < 1$$

$$\lim_{x \to 0} cosx = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

Pelo Teorema do confronto ou teorema do sanduiche:

Se $g(x) < f(x) < h(x)$ são funções contínuas e se $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = b$, *então*, $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

Logo,

$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1.$

Novamente, a partir do limite fundamental trigonométrico, podemos resolver outros limites.

Exemplos:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3.sen3x}{3x} = 3.\lim_{x \to 0} \frac{sen3x}{3x} = 3.1 = 3$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{3.sen3x}{2.3x} = \frac{3}{2} \lim_{x \to 0} \frac{sen3x}{3x} = \frac{3}{2}.1 = \frac{3}{2}$

ATIVIDADE

1.9. Resolver:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{5x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } \pi x}{3\pi x}$

1.10. Resolva os limites gerais:

a) $\lim_{x \to 2} 4x^2 - 7x + 2$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

c) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{3x^2 - 2x - 5}{-x^2 + 3x + 4}\right)$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

e) $\lim_{x \to -2} \frac{4 - x^2}{2 + x}$

f) $\lim_{x \to 3/2} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3}$

g) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6}$

h) $\lim_{x \to \infty} -3x^3 + 2x^2 - 5x + 3$

i) $\lim_{x \to -\infty} 5x^3 - 4x^2 - 3x + 2$

j) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

k) $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{n}$

l) $\lim_{x \to 0} \frac{sen2x}{senx}$

m) $\lim_{x \to \infty} 2x + 3$

n) $\lim_{x \to -\infty} 4 - 5x$

1.11. $Para\ \ a\ função\ f(x) = \begin{cases} 3-2x, se\ x \geq -1; \\ 4-x, se\ x < -1 \end{cases}$

calcule os limites abaixo, se existirem:

$\lim_{x \to -1_+} f(x)$; $\lim_{x \to -1_-} f(x)$; $\lim_{x \to -1} f(x)$

1.9.4. $Para\ \ a\ função\ f(x) = \begin{cases} 3x-2, se\ x > 1; \\ 2, se\ \ x = 1 \\ 4x+1, se\ x < 1 \end{cases}$

calcule os limites abaixo, se existirem:

$a)$ $\lim_{x \to 1_+} f(x)$; $b)$ $\lim_{x \to 1_-} f(x)$; $c)$ $\lim_{x \to 1} f(x)$

LISTA DE EXERCÍCIOS

1.9. Calcular os seguintes limites (revisão):

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{2x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{x}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{5x}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } \pi x}{3\pi x}$

e) $\lim_{x \to \infty} (1 - \frac{1}{x})$

f) $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

g) $\lim_{x \to \infty} x^2 + 4x - 3$

h) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x-1}$

i) $\lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x-1}$

j) $\lim_{X\to 0} \frac{|2X|}{X}$

k) $\lim_{X\to -3} \frac{X+3}{X-1}$

l) $\lim_{X\to 2} \frac{-1}{(X-2)^2}$

m) $\lim_{H\to 0} \frac{(2+H)^2-4}{H}$

n) $\lim_{X\to -\infty} \frac{2X^3-3X+5}{4X^5-2}$

1.10. Esboce o gráfico e calcule os limites indicados, se existirem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x < 0; \\ x^2, 0 \le x < 1; \\ 2, x = 1 \\ 2 - x, x > 1 \end{cases}$$

a) $\lim_{x\to 1} f(x)$
b) $\lim_{x\to 0} f(x)$
c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

Capítulo 2

2. TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO.

Iniciemos o estudo da **TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO** lembrando as funções de primeiro e segundo grau.

Para isso vamos analisar uma situação, por exemplo, de uma função demanda, que relaciona o preço unitário de certo produto em função da quantidade demandada.

Em geral, à medida que a quantidade aumenta o preço unitário cai. A tabela abaixo mostra esta relação, além de apresentar a coluna da receita total, onde se supõe que toda a produção seja vendida, sendo a receita o produto da quantidade pelo preço unitário.

Quantidade	Preço unitário	Receita total
x	y (R$)	R(R$)
0	12	0
100	10	1.000,00
200	8	1.600,00
300	6	1.800,00
400	4	1.600,00
500	2	1.000,00
600	0	0

Determinando-se a função para a relação quantidade x preço unitário, percebe-se que é uma função de primeiro grau, onde o coeficiente angular coincide com o cálculo da tangente do ângulo alfa

e o coeficiente linear é a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo y, ou seja, quando x for igual à zero.

Já a relação entre a receita total e a quantidade segue uma função de 2º grau.

Para determinar essas funções, construa inicialmente o gráfico correspondente aos dados da tabela preço unitário x quantidade e, determine o coeficiente angular e linear da reta:

Resposta: y(x) = -0,02x +12

Verificamos que a tangente mostra a relação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, que representa nesse caso, a variação unitária do preço por unidade do produto. Esse valor mede a taxa de variação média da função preço.

Quando y e x têm variações diretamente proporcionais, ou seja, quando ao variar x de uma unidade , o valor correspondente de y varia sempre de um valor constante de unidades, temos uma função de 1º grau, cujo coeficiente angular mede a taxa de variação da função.

Lembrando que o coeficiente angular pode ser obtido calculando-se a tangente do ângulo alfa (tgα), então, ao calcular a inclinação da reta estamos calculando a taxa de variação da função. Essa taxa de variação pode ser dada pela fórmula abaixo:

$$\text{tg}\alpha = \frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo \propto}{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo \propto}$$

Ou ainda, podemos escrever:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_{(x_0+\,\Delta x)} - f_{(x_0)}}{\Delta x}$$

Observação: Sempre que a função de 1ºgrau é crescente, o ângulo alfa, que é o ângulo entre o eixo x e a reta, forma um ângulo menor que 90°, e tem coeficiente angular positivo. Para a função decrescente, o coeficiente angular será negativo e o ângulo será maior que 90°.

Se considerarmos, agora, uma função que não seja do 1º grau, as grandezas x e y não têm variações diretamente proporcionais. Portanto a rapidez com que y varia com x depende do intervalo de x considerado.

Exemplo:

Seja a função receita total do exemplo acima, que podemos obter multiplicando a função y(x) por x:

$R(x) = (-0{,}02x+12) \cdot x = -0{,}02x^2 + 12x$

Para obtermos a TMV (taxa de variação média) no intervalo de 100 a 300 unidades, por exemplo, temos o resultado:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1800-1000}{300-100} = 4$$

Ou seja, nesse intervalo a receita cresce R$4,00 a cada unidade produzida a mais.

Mas, se considerarmos, o intervalo de 400 a 500 peças produzidas, a TMV é igual a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1000-1600}{500-400} = -6.$

Ou seja, a receita cai R$6,00 a cada unidade produzida.

ATIVIDADE

2.1. Considere a função f(x) = 2000x, onde *y(x)* poderia representar a receita de um produto e *x* a quantidade. Qual a taxa de variação da função para um intervalo de produção entre 100 e 500 peças?

2.2. Foram registradas as temperaturas (°C) a cada hora, na cidade de São Paulo, começando à meia noite, em um dia. O tempo foi medido em horas, conforme tabela abaixo:

Tempo (h)	Temperatura(°C)
0	12,2
1	13,1
2	13,3
3	14,0
4	14,6
5	15,2
6	15,8

Encontre a TMV:

a) Entre meia noite e 2h .
b) Entre 2h e 6h .
c) Entre 2h e 4h .
d) Entre 0 e 4h .

2.3. Determine a TMV em cada caso:

a) $y = 2x + 1$ entre os pontos 1 e 4.

b) $y = -3x$ entre os pontos 2 e 3.

c) $y= -2x^2 + 3x + 4$ entre os pontos 0 e 2.

d) $f(x) = x^3 - 1$ entre 0 e 2.

e) $y = -2x$, entre -1 e 5.

2.4. Suponha que em uma indústria um tanque contém, inicialmente, 50 litros de tinta. Uma torneira ao ser aberta despejará água no tanque a uma razão constante de 2 litros a cada minuto. Escreva a função que representa o volume (litros) x tempo (minutos), e determine a TMV.

LISTA DE EXERCÍCIOS

2.1. A quantia y a ser paga pela compra de certa quantidade de um produto é y = 2x+5, onde y = valor em reais e x = quantidade. Qual a taxa média de variação da função no intervalo de x entre 2 e 3?

2.2. A massa M de um material contido em um recipiente varia com o tempo t de acordo com a expressão:

$M = 10 - 2t^2$ (m em kg e t em horas).

a) Qual a TMV de m em relação a t, no intervalo t = 0 e t = 2 h?

b) Quantos quilogramas a massa diminuiu em 2 horas?

2.3. Um dispositivo de resfriamento de uma máquina funciona de maneira que, após ser desligada, a sua temperatura varia com o tempo de acordo com a expressão: $\theta = 200 - t$ (θ em graus e t em minutos)

a) Qual a TMV?

b) Depois de quanto tempo é atingida a temperatura de $20°C$?

2.4. Construa o gráfico e calcule a taxa média de variação das funções abaixo, através do gráfico:

a) $y = x + 3$ entre os pontos 2 e 3($x_0= 2$ e $\Delta x =1$) e entre os pontos 2 e 4($x_0= 2$ e $\Delta x =2$).

b) $y= 2x^2 + 3x + 4$ entre os pontos 2 e 4($x_0= 2$ e $\Delta x =2$) e entre os pontos 4 e 6($x_0=4$ e $\Delta x =2$).

c) $y = -x^2 + 5x - 6$ entre os pontos 1 e 2($x_0= 1$ e $\Delta x =1$).

OBS. Lembre-se que o gráfico de uma função de primeiro grau é sempre uma reta: crescente, se o coeficiente *a* for positivo e decrescente se for negativo. Já o gráfico de uma função de segundo grau é uma parábola, que terá concavidade para cima se o coeficiente *a* for positivo e, para baixo se *a* for negativo.

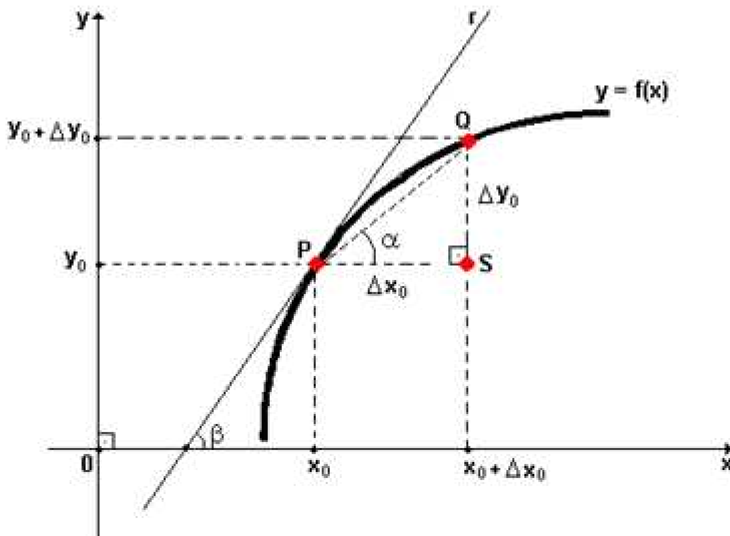
Capítulo 3

3. DERIVADAS.

3.1. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE DERIVADA.

Para caracterizar a rapidez com que uma função y = f(x) varia em um ponto x_0, utilizamos a noção de taxa média de variação no ponto ou *DERIVADA*.

Nas proximidades de um ponto x_0, a curva, que representa o gráfico de uma função, pode ser aproximada por uma reta, se consideramos dois pontos P e Q muito próximos com $\Delta x \to 0$.



Note que, quando $\Delta x \to 0$, o ponto Q tenderá ao ponto P e a reta secante tenderá à reta tangente r.

A derivada de f no ponto x_0 pode ser definida como:

$$\lim_{\Delta x \to 0} TMV = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x} \equiv tg\alpha = \frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}$$

Ou

$$\lim_{\Delta x \to 0} TMV = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y - y_0}{x - x_0} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

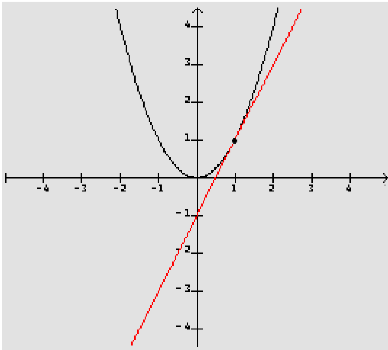
A derivada, assim definida pode ser indicada por $y'(x)$, $f'(x)\ ou\ \frac{dy}{dx}$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

A derivada é o valor aproximado da taxa média de variação da função *f* para valores pequenos de Δx.

Podemos entender a ideia da rapidez com que uma função varia em um ponto, através da definição geométrica da derivada, que é a medida da inclinação da reta tangente à curva no ponto x_0.

Veja exemplo da função $y = x^2$, onde se traçou a reta tangente à curva, no ponto x =1.



Para o cálculo da derivada no ponto, podemos utilizar várias técnicas:

a) Geometricamente, pelo cálculo da tangente:

$$\lim_{\Delta x \to 0} TMV = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x} \equiv tg\alpha = \frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}$$

$$= \frac{1}{0{,}5} = 2.$$

b) Pela definição do limite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - {x_0}^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{{x_0}^2 + 2x_0 \ \Delta x + (\Delta x)^2 - {x_0}^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0 \ \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \ (\ 2x_0 + \ \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0$$

No ponto $x_0 = 1, a\ derivada$ é $igual\ a\ 2 \times 1 = 2.$

Note que ao determinar a derivada pela definição, podemos calcular o valor da derivada para qualquer ponto, pois temos a <u>função derivada</u>, que assume valores diferentes para diferentes valores de x.

No ponto $x_0 = 1, a\ derivada\ vale\ 2$;

No ponto $x_0 = 2, a\ derivada\ vale\ 4$;

No ponto $x_0 = 3, a\ dervivada\ vale\ 6$ e assim por diante.

c) Através do limite, da seguinte maneira:

$$\text{Se } x_0 = 1 \rightarrow f(x_0) = {x_0}^2 = 1$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'_{(1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = 2$$

Todas as maneiras conduzem ao mesmo resultado.

EXERCÍCIOS

3.1. Calcule a derivada em cada ponto da função, geometricamente:

a) y = 3x; no ponto $x_0 = 2$.
b) $y = x^2 + 4$; no ponto $x_0 = ½$.
c) $y = 3x^2 + 10x - 1$; no ponto $x_0 = 1$.

3.2. Calcule a derivada da função, através da definição:

a) y = 5 .
b) y = 2x .
c) $y = x^2 – 3$.

Respostas: 3.1.a) 3; b)1; c)16 3.2. a)0; b)2; c)2x

ATIVIDADE

3.1. Calcule as derivadas, através da definição:

a) $y = x^2 - 2x$ no ponto $x_0 = 6$
b) $y = 2 - x^3$ no ponto $x_0 = -2$

LISTA DE EXERCÍCIOS

3.1. Calcule a derivada das funções, geometricamente:

a) y = 2x no ponto $x_0 = 3$.
b) $y = x^2 - 2x$ no ponto $x_0 = 6$.

3.2. Calcule a derivada das funções pela definição:

a) y = $-5x^2$ no ponto $x_0 = 2$.
b) y = $2-x^3$ no ponto $x_0 = -2$.
c) y = 4x + 1 .

3.2. REGRAS DE DERIVAÇÃO.

O cálculo das derivadas através do gráfico ou pelo limite é um processo demorado. Para agilizar essa operação pode-se decorar as chamadas regras de derivação, que facilitam muito a obtenção das funções derivadas.

ALGUMAS REGRAS DE DERIVAÇÃO:

FUNÇÕES SIMPLES	DERIVADA
k(constante)	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
Ax	a
$\log_a x$	$\frac{1}{xlna}$
lnx	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x lna$
e^x	e^x
senx	cosx
cosx	-senx
tgx	$1 + tg_x^2 = sec_x^2$

1- Derivada da função constante:

Se K é uma função constante e f(x) = c, para todo $x \in R, então\ f'(x) = 0$.

Exemplo:

$$y = 5 \rightarrow y' = 0$$

2- Derivada da função potência:

Se f(x) = x^n , com $n \in R$, então $f'(x) = n.x^{n-1}$

Exemplos

a) f(x) = $x^7 \Rightarrow f'(x) = 7.x^{7-1} = 7x^6$
b) f(x) = $x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2.x^{-2-1} = -2.x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$
c) f(x) = $x^{3/4} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}.x^{3/4-1} = \frac{3}{4}x^{-1/4} = \frac{3}{4x^{1/4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
d) y = $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}.x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
e) y = $\frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow y' = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$

3- Derivada do produto de uma constante por uma função:

Se f(x) = c.f(x) $\Rightarrow f'(x) = c.f'(x)$

Exemplos

a) $y = 2x^3 + 5\sqrt[10]{x} = 2x^3 + 5x^{\frac{1}{10}} \Rightarrow y' = 6x^2 + \frac{1}{2\sqrt[10]{x^9}}$

b) y = $3x^9 + 4x^2 \Rightarrow y' = 27x^9 + 8x$

4- As demais regras se aplicam imediatamente.

Exemplos

a) y = -2cosx + 5 lnx – 3 $\Rightarrow y' = 2senx + \frac{5}{x}$

b) y = 9 logx – 4 senx + 12 $e^x \Rightarrow y' = \frac{9}{x.ln10} - 4cosx + 12e^x$

c) y = $4.3^x + 2tgx - 5x \Rightarrow y' = 4.3^x.ln3 + 2\,sec^2x - 5$

ATIVIDADE

3.2. Calcule as derivadas pelas regras:

a) $y = 3x^3 - 6x + 2$
b) $y = 4\sqrt{x} + 2e^x + senx$
c) $y = -2\,log_3^x + 4.5^x - tgx$
d) $y = \frac{5}{2}\,cosx - 10\,lnx$

LISTA DE EXERCÍCIOS

3.3. Calcule as derivadas pelas regras:

a) y = x^3 - 6x + 5
b) y = 30 - 4 $x^{0,5}$ + $3x^7$ – 5
c) y = $2e^x$ – 4x + 3 lnx – 4x

d) $f(x) = \frac{4}{x^3}$ no ponto $x = -1$

e) $y = \frac{-1}{3}x^{-3}$

f) $y = 5\sqrt{x}$

g) $y = -2senx + 5cosx - 2^x$

3.3. OPERAÇÕES DE DERIVAÇÃO.

y = u + v	y ' = u' + v'
y = u - v	y ' = u' - v'
y = u.v	y' = u'.v + u.v'
y = u / v , v ≠ 0	y' = (u'.v - u.v') / v^2

Considere na tabela acima que u e v são funções que dependem de x.

Nos exemplos anteriores já utilizamos as operações de soma e subtração, que são intuitivas, mas é preciso ter cuidado quando se trata do produto e quociente de duas funções.

3.3.1. DERIVADA DO PRODUTO DE DUAS FUNÇÕES.

Exemplos

a) y = (2 + 5x)(7 – 3x)

$$u = (2 + 5x) \Rightarrow u' = 5\,;\, v = (7 - 3x) \Rightarrow v' = -3$$

$$y' = u'v + uv' \Rightarrow y' = 5(7 - 3x) + (2 + 5x)(-3)$$

$$y' = 35 - 15x - 6 - 15x = -30x + 29$$

b) y = $x^3 . cosx$

$$u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2\,;\, v = cosx \Rightarrow v' = -senx$$

$$y' = 3x^2 . cosx + x^3 . (-senx)$$

$$y' = x^2(3cosx - xsenx)$$

c) y = $2^x . lnx$.

$$u = 2^x \Rightarrow u' = 2^x . ln2\,;\, v = lnx \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$$

$$y' = 2^x . ln2 . lnx + 2^x . \frac{1}{x} = 2^x . ln2 . lnx + \frac{2^x}{x}$$

ATIVIDADE

3.3. Calcule as derivadas:

a) $y = (2 + 3x)(1 - 4x)$
b) $y = x.e^x$
c) $y = 2xlnx$
d) $y = e^x.4x$

LISTA DE EXERCÍCIOS

3.4. Calcule as seguintes derivadas:

a) $y = x^3.(2x^2 - 3x)$
b) $y = e^x.lnx$
c) $y = 4^x.senx$

3.3.2. DERIVADA DO QUOCIENTE DE DUAS FUNÇÕES.

Exemplos

a) $y = \frac{x}{x+1}$

$$u = x \Rightarrow u' = 1 \,;\, v = x + 1 \Rightarrow v' = 1$$

$$y' = \frac{1.(x + 1) - x.1}{(x + 1)^2} = \frac{1}{(x + 1)^2}$$

b) $y = \frac{10}{x^2 + 2x + 1}$

$$u = 10 \Rightarrow u' = 0 \,; v = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow v' = 2x + 2$$

$$y' = \frac{0.v - 10.(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$$

c) $y = \frac{e^x}{4x}$

$$u = e^x \Rightarrow u' = e^x \,; v = 4x \Rightarrow v' = 4$$

$$y' = \frac{e^x.4x - e^x.4}{(4x)^2} = \frac{e^x(x-1)}{4x^2}$$

ATIVIDADE

3.4. Calcule as derivadas:

a) $y = \frac{x^2}{5x+1}$

b) $y = \frac{5}{x^2+2x-3}$

c) $y = \frac{4^x}{cosx}$

LISTA DE EXERCÍCIOS

3.5. Calcule as derivadas:

a) $y = \frac{-8}{x+2}$

b) $y = \frac{e^x}{x^2}$

3.4. DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA.

Sejam f e g funções tais de modo que $Im\ (g) \subset D(f)$, a função f(g(x)) ou *fog* é a função composta de *f* com *g*, sendo $x \in D(g)$.

Exemplos de função composta: $\sqrt{x^2 + 3}\,, onde\ g(x) = x^2 + 3$; $\ln(2x + 1), onde\ g(x) = 2x + 1;\ sen(4x - 2), onde\ g(x) = 4x - 2.$

3.4.1. REGRA DA CADEIA.

A derivada da função composta segue a regra conhecida como regra da cadeia.

Se $h(x) = g\big(f(x)\big) = gof(x), então\ h'(x) = g'\big(f(x)\big).f'(x)$

Ou $h' = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}.\frac{dg}{dx}$

Como exemplo da derivada de uma função composta suponha uma função f(x) = 2x + 3 e g(x) = 4.f(x) -2

A derivada da função *f* é igual a 2 e a derivada da função *g* em relação à *f* é *igual a 4.*

Escrevendo a função h em função de x temos: *h* = 4*. (2x + 3)* + 3 = 8x +12 +3 = 8x + 15, que tem como derivada o valor 8. Este valor coincide com a formulação

$h' = g'\big(f(x)\big).f'(x). = 2.4 = 8.$

Exemplos

a) $h = \sqrt[3]{x^2 + 3} = (x^2 + 3)^{\frac{1}{3}}$.

$$h' = \frac{1}{3}(x^2 + 3)^{\frac{-2}{3}}.2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3)^2}}$$

b) $y = e^{4x+3}$.

$$y' = e^{4x+3}.4 = 4e^{4x+3}$$

.c) $y = sen\,(2x + 1)$.

$$y' = (\cos(2x + 1)).2 = 2\cos(2x + 1)$$

ATIVIDADE

3.5. Calcule a derivada das seguintes funções compostas:

a) $y = \sqrt{2x + 4}$
b) $y = (3x + 1)^4$
c) $y = \ln(x^2 + 1)$

LISTA DE EXERCÍCIOS

3.6. Calcule as derivadas:

a) $y = e^{1+x}$

b) $y = e^{(1+x^2)}$

c) $y = \ln(5x - 20)$

d) $y = (1 - 3x)^5$

e) $y = \frac{\ln(1-2x)}{5}$

f) $y = sen^2x - cos^2x$

3.5. DERIVADAS SUCESSIVAS.

Seja y = f(x). Chamamos de derivada primeira a função y' = f'(x) obtida a partir da derivação de y = f(x). Se derivarmos y' = f'(x) oberemos y'' = f''(x) ou segunda derivada. Podemos continuar a derivar ate $y^n = f^n(x)$ quando for possível.

Exemplo

$$y = -8x^4 \Rightarrow y' = -32x^3 \Rightarrow y'' = -96x^2 \Rightarrow y''' = -192x$$

3.6. TEOREMA DO VALOR MÉDIO. MÁXIMOS E MINÍMOS DA FUNÇÃO.

O Teorema do Valor Médio tem o seguinte enunciado:

Seja f uma função definida num intervalo fechado [a,b]. Se

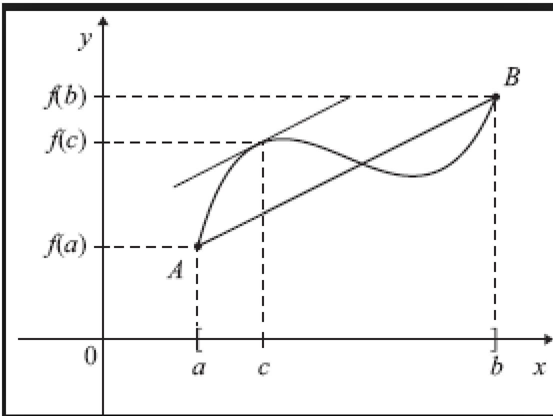
a) f é $variável\ no\ intervalo\ ]a,b[$

b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)\ e\ \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$,

Então, existe um ponto $c\ \in\ ]a,b[\ tal\ que$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



De acordo com o Teorema do Valor Médio, podemos verificar que a derivada mede a tendência ao crescimento ou ao decrescimento que uma função y = f(x) apresenta em cada ponto x do seu domínio.

- Quanto à derivada primeira:

Nos intervalos em que $f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f(x)$ é $crescente$.

Nos intervalos em que $f'(x) < 0 \;\Rightarrow f(x)$ é $decrescente$.

- Quanto a segunda derivada. Ela avalia o crescimento ou decrescimento da primeira derivada, determinando a concavidade da função.

Nos intervalos em que $f''(x) > 0 \;\Rightarrow\; f(x)\ tem\ concavidade\ para\ cima$.

Nos intervalos em que $f''(x) < 0 \;\Rightarrow\; f(x)\ tem\ concavidade\ para\ baixo$.

Exemplo

Seja f(x) = x^2 – 6x

A derivada primeira informa sobre o crescimento dou decrescimento da função.

$$f'(x) = 2x - 6$$

Igualando a zero a função derivada determinamos suas raízes:

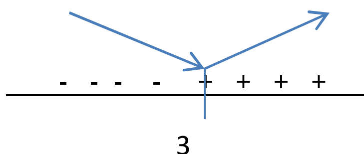
$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Quanto ao sinal da função, temos que para valores de x menores que 3, ela é negativa e,

para valores de x maiores que 3, ela é positiva.

Portanto, a função y é decrescente para valores de x menores que 3

e a função y é crescente para valores de x maiores que 3.



Como a função decresce para valores de $x < 3$, cresce para valores de $x > 3$, e tem derivada nula no ponto x = 3, então 3 é um ponto de MÍNIMO DA FUNÇÃO.

A derivada segunda informa sobre a concavidade.

$$f''(x) = 2 \Rightarrow Positiva\ para\ qualquer\ valor\ de\ x$$
$$\Rightarrow concavidade\ para\ cima.$$

ATIVIDADE

3.6. Estudar a função $y = x^3 - 12\,x^2 + 6$, quanto ao crescimento e decrescimento e também quanto à concavidade.

Aplicação

Considere a função lucro de um empresa como sendo L(x) = R(x) –C(x), onde L(x) representa a função lucro, R(x) receita e C(x) custo. Um micro empresário vende 2000 salgados por R$1,00 cada. Pretendendo aumentar seu lucro fez um estudo e, percebeu que a cada aumento de R$0,10 no preço unitário do salgado, perdia 10% do total de vendas inicial. O custo de cada salgado é R$0,40. Qual o valor de cada salgado que torna o lucro máximo? Qual o lucro máximo?

LISTA DE EXERCÍCIOS

3.7. Estudar as funções abaixo, quanto ao crescimento e decrescimento, máximos e mínimos e também quanto à concavidade.

a) $y = 2x + 1$
b) $y = -x^2 + 12x + 8$
c) $y = lnx, x > 0$
d) $y = e^x$
e) $y = x^3 - 6x^2 + 20$

3.7. REGRA DE L'HÔSPITAL E FORMAS INDETERMINADAS DE LIMITE.

$$Se\ f(x) tem\ a\ forma\ ideterminada\ \frac{0}{0}\ ou\ \frac{\infty}{\infty}\ em\ x = c\ e$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \; existe, então \; \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Obs. Vale também para $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemplos

Calcular os limites:

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 12}$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 12} = \lim_{x \to 3} \frac{2x - 6}{2x - 7} = \frac{0}{-1} = 0$$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(x+1)}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(x + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\frac{1}{x + 1}} = 2$$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{e^x - 1}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{e^x} = 2$$

ATIVIDADE

3.7. Calcule os limites utilizando a Regra de L'hôspital

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$
b) $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x}$
c) $\lim_{x\to 1} \frac{lnx}{x^2 - x}$

LISTA DE EXERCÍCIOS

3.8. Calcule os limites utilizando a Regra de L'hôspital

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x} - 1}{3x}$
b) $\lim_{x\to 1} \frac{sen\ (\pi x)}{x - 1}$
c) $\lim_{x\to 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

Capítulo 4

4. INTEGRAIS

4.1. CONCEITO DE INTEGRAIS INDEFINIDAS.

O processo de antiderivação é chamado de integração. O motivo deste nome será entendido melhor no capítulo sobre integrais definidas.

Conhecendo-se, por exemplo, como varia a velocidade em função do tempo de um móvel, é possível descrever como é a função posição por tempo? Ou ainda, se souber como varia uma função receita, é possível determinar a função receita? A resposta à estas perguntas chama-se “**integral**”.

Pode-se dizer que a derivada de uma função trabalha com elementos infinitesimais. Ela fatia as funções, tentando aproximar as curvas por retas. Já as integrais reúnem, somam, integram, realizando o processo inverso.

Se conhecermos a derivada de uma função qualquer, é possível determinar a função *primitiva,* que é a função original.

Seja F uma função derivável em um intervalo aberto I. Se f(x) é a sua derivada, podemos escrever:

$$F' = f(x), x \in I$$

Exemplo: Seja f(x) = 5, quais as funções (primitivas), que ao derivar resultam em f(x)

Temos, como resposta:

F(x) = 5x

F(x) = 5x +1

F(x) = 5x+10

Qualquer função do tipo F(x) = 5x + c, onde c é um número real, terá como derivada a função f(x) = 5.

Pode-se, então dizer que a integral da função f(x) =5 é o conjunto das funções primitivas F(x) = 5x+c.

Pode-se indicar isto, através da notação:

$$\int f'_{(x)} dx = F(x) + K \,, K \in R$$

ATIVIDADE

4.1. Determine as funções primitivas:

a) y(x) = 4x
b) y = $3x^2$+5
c) y = $e^x + 3$
d) y= $\frac{1}{x} - 2 \,, x \neq 0$

PROPRIEDADES:

A integral indefinida possui propriedades operatórias que são:

Integral da soma: $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Integral da subtração: $\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Integral de uma constante (k) por uma função: $\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx$

4.2. INTEGRAL DE FUNÇÃO POLINOMIAL.

Regra da função nula: $\int 0dx = k.$

Regra da constante: $\int kdx = k.x + c$

Regra da potência: $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$, para $n \neq -1$

EXERCÍCIOS

4.1. Resolva as integrais indefinidas:

a) $\int 4\,dx$
b) $\int (x^2 - x)\,dx$
c) $\int \frac{2x^5}{3}\,dx$
d) $\int -\frac{1}{x^4}\,dx$
e) $\int \sqrt[4]{x^3}\,dx$
f) $\int \left(x^{-4} + \frac{5x}{2} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$

Respostas:

a) 4x+c ; b) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c$ *; c)* $\frac{x^6}{9} + c$ *; d)* $\frac{1}{3x^3} + c$ *; e)* $\frac{4\sqrt[4]{x^7}}{7} + c$ *;*
f) $-\frac{1}{3x^3} + \frac{5x^2}{4} - 8\sqrt{x} + c.$

ATIVIDADE

4.2. Resolva:

a) $\int 3\,dx$

b) $\int x\,dx$

c) $\int x^2\,dx$

d) $\int \sqrt{x}\,dx$

e) $\int x^{-3}\, dx$

f) $\int \frac{1}{x^2} dx$

g) $\int (x^2 + x - 5)\, dx$

h) $\int \left(\frac{x^3}{5} - \frac{4x}{5} + 9\right) dx$

LISTA DE EXERCÍCIOS

4.1. Determine a integral das funções abaixo:

a) $\int (x^7 + x^2 + x)\, dx$

b) $\int \frac{5}{2}\, x^3\, dx$

c) $\int (20x^{-4} + 2x)\, dx$

d) $\int -4x^5\, dx$

e) $\int (6x^{-2} - 3\sqrt[4]{x} + 2)\, dx$

f) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$

g) $\int \frac{32}{\sqrt{x}} dx$

h) $\int (2x^2 + 3)^2\, dx$

i) $\int \frac{x^3 + 2x^4}{\sqrt{x}} dx$

4.3. INTEGRAL DE OUTRAS FUNÇÕES.

Vejamos algumas regras de integração, considerando as funções polinomiais já vistas e outras:

$função\ y(x)$	$\int y\, dx$
K(constante)	Kx
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
a^x	$\frac{a^x}{lna}$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$ln\|x\|$
$senx$	$-cosx$
$cosx$	$senx$

Exemplos:

a) $\int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx = 3\; ln|x| + c$

b) $\int (e^x + senx)\, dx \;=\; e^x - cosx + c$

c) $\int (3x^2 + 5^x)\, dx$ = $x^3 + \frac{5^x}{ln5} + c$

d) $\int (4x^{-3} + 2)\, dx$ = $\frac{-2}{x^2}$ + 2x + c

e) $\int (\sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{xln3})\, dx$ = $\frac{4\sqrt[4]{x^7}}{7} - \log_3 x$ + c

f) $\int (\frac{5}{\sqrt{x}} - 4)\, dx$ = $10\sqrt{x} - 4x + c.$

ATIVIDADE

4.3. Resolva as integrais:

a) $\int 2e^x\, dx$

b) $\int (3senx + \; 2^x)\, dx$

c) $\int (3x - \frac{5}{x})\, dx$

d) $\int (\sqrt[3]{x^5} + \; 2cosx)\, dx$

e) $\int \frac{x^2+3e^x}{5} dx$

f) $\int (\frac{2}{\sqrt[4]{x^5}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}) dx.$

LISTA DE EXERCÍCIOS

4.2. Determine a integral das funções abaixo:

a) $\int (\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} x - 6)\, dx$

b) $\int 2\pi R \, dR$
c) $\int (3x^2 + 4e^x)\, dx$
d) $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^2} + 1) dx$
e) $\int (\frac{1}{x^5} + \ 2^x)\, dx.$

Aplicações

1- Na física, observa-se que, se temos a função posição, podemos derivá-la e obter a função velocidade.

Seja $S = \ S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \ \rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = S\,' = v = \ v_0 + at$

Então, de maneira inversa, se for pedida a função posição S, sendo dada a velocidade, escrevemos:

$S = \ \int v \, dt = \int (\ v_0 + at\ ) dt \ = \ v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ + c

Exemplos.

a) Se a velocidade de um móvel variar no decorrer do tempo segundo a função v = 50 + 2t, calcular a equação do espaço percorrido pelo móvel em função do tempo, sabendo que quando t=0, o espaço inicial era de 5000m.

$S = \ \int (\ 50 + 2t\ ) dt \ = 50t + \ 2\frac{t^2}{2} \ + c$

Quando t = 0 → S = 5000, então $5000 = 50.0 + 0^2 + c$ → c = 5000

Logo, $S = 50t + t^2 + 5000$

b) Vimos no capítulo sobre TMV como obter uma função receita total. A função obtida foi

R(x) = $-0{,}02x^2 + 12x$. As respectivas funções taxa de variação, ou seja, suas derivadas, são chamadas funções receitas marginais – R_{mg}.

Logo, a função receita marginal foi de -0,04x + 12. Ou seja, para x=100 peças produzidas, a receita aumenta em R$8,00 por unidade produzida.

Para x= 200, a receita aumenta em R$4,00 por unidade produzida.

Agora, se temos a função marginal, basta integrar, para obter a função receita total:

$R(x) = \int(-0{,}04x + 12)\,dx = -0{,}02x^2 + 12x + c$. No caso c=0, para uma produção igual a zero.

ATIVIDADE

4.3.1. O custo marginal para produção de uma quantidade x de uma peça é dado por $C_{mg} = \sqrt{x} - 2$. Suponha que o custo fixo é R$20,00, ou seja, para x=0, o custo total será R$20,00. Determine a função custo total e o custo total de produção de 100 peças.

4.4. MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO.

O Cálculo da primitiva de uma função nem sempre é possível utilizando as regras das funções já vistas.

Funções produto, quociente, compostas, necessitam de técnicas próprias para integração. Vejamos duas destas técnicas:

4.4.1. MUDANÇA DE VARIÁVEL – INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO.

Para utilizar este método, precisamos, antes, estudar o **DIFERENCIAL DE UMA FUNÇÃO.**

Se y = f(x) é uma função derivável no ponto x, chamamos de **diferencial da função f**, neste ponto x a expressão **dy**:

Exemplos:

a) $Se\ y = 3x \rightarrow\ dy = 3dx$

b) $Se\ y = x^2 + 1 \rightarrow dy = 2xdx$

c) $Se\ y = senx \rightarrow dy = cosxdx$

Podemos utilizar o conceito de diferencial para cálculos aproximados, por exemplo:

a) Calcular aproximadamente sen31º.

Sabemos que sen30º = 0,5 e cos30º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, então f(x) = senx, x = 30º e dx = 1°

dy = f'(x)dx → dy = cosxdx → dy = cos30º .$\frac{\pi}{180}$ → dy = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.$\frac{\pi}{180} = 0{,}0151$

Logo, sen31º = f(30º) + dy = 0,5 + 0,0151 = 0,5151.

b) Calcular aproximadamente o valor de $\sqrt{15{,}5}$.

Sabemos que $\sqrt{16} = 4, f(x) = \sqrt{x}\ , x = 16\ e\ dx = 0{,}5.$

dy = f'(x) dx = $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ .(-0{,}5) = -0{,}0625.$

Então $\sqrt{15{,}5} = 4 + (-0{,}0625) = 3{,}9375$

Agora, que já definimos diferencial, podemos proceder à mudança de variável.

Consideremos o cálculo da integral $\int (2x+1)^5\,dx$

A fórmula da potência $\int x^5\,dx$ = $\frac{x^6}{6} + c$ não pode ser aplicada diretamente. Daí a técnica da mudança de variável:

Podemos substituir a variável x por t, e assim, poder utilizar as regras elementares:

Seja $t = 2x + 1 \rightarrow dt = 2dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}dt$

Então $\int (2x+1)^5\, dx = \int t^5 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\int t^5\, dt = \frac{1}{2}.\frac{t^6}{6} + c = \frac{1}{12}t^6 + c$

Retornando à variável x, temos:

$\int (2x+1)^5\, dx = \frac{1}{12}(2x+1)^6 + c$

EXERCÍCIOS

4.2. Resolva as integrais:

a) $\int 5x^2.\sqrt{x^3-4}\, dx$
b) $\int \frac{3x}{x^2+4} dx$
c) $\int \operatorname{sen}(5x)\ dx$
d) $\int e^{x^2}.xdx$
e) $\int \frac{10}{3x+4} dx.$

Respostas:

a) $\frac{10\sqrt{(x^3-4)^3}}{9} + c$; b) $\frac{3\, ln|x^2+4|}{2} + c;$ c) $\frac{-1}{5}\cos 5x + c;$ d) $\frac{1}{2}\, e^{x^2} + c;$

e) $\frac{10}{3}\ ln|3x+4|$ + c

ATIVIDADE

4.4. Resolva:

a) $\int (2x + 5)^3 \, dx$
b) $\int \frac{2}{4x+1} dx$
c) $\int e^{4x} \, dx$
d) $\int 2e^{senx} . cosxdx$
e) $\int (x + 7)^5 \, dx$
f) $\int e^{1-5x} \, dx.$

LISTA DE EXERCÍCIOS

4.4. Resolva as integrais:

a) $\int (3x^2 + 1)^3 . 6x \, dx$

b) $\int 4 \, x\sqrt{x^2} dx$

c) $\int x^2 \sqrt{(x^3 + 2 \,)} \, dx$

d) $\int \frac{4x}{(x^2+2)^7} dx$

e) $\int (x^3 + 5)^3 \, 3x^2 dx$

f) $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}} dx$

g) $\int \frac{1}{3+x} dx.$

4.4.2. INTEGRAÇÃO POR PARTES.

Sabe-se que para a derivada de um produto vale:

Se y = u.v → y ' = u ' v + u v ' ; lembrando que as funções y, u e v dependem da variável x,

Tem=se para a primitiva de y '

$$\int y'dx = \int u'v\,dx + \int u\,v'dx$$

Lembrando que $y = u.v$

$$u.v = \int u'vdx + \int uv'dx \rightarrow$$

$$\int u'vdx = u.v - \int uv'dx \quad ou \quad \int uv'dx = u.v - \int u'vdx$$

Esta é a fórmula a ser utilizada para a integração por partes.

É uma expressão útil quando se tem a integral de um produto de funções e é possível considerar que uma das funções seja uma função derivada.

Exemplos:

a) Calcular a $\int x.e^x\,dx$

Pode-se considerar que $u = x \; e \; v' = e^x \rightarrow u' = 1 \; e \; v = \int e^x \; dx = e^x$

E aplicar a fórmula $\int uv'dx = u.v - \int u'vdx$

Assim a $\int x.e^x\,dx = x.e^x - \int 1.e^x \; dx = x.e^x - e^x + c = e^x(\,x+1) + c$

b) $\int (3x+7)\,cosx\,dx$

Se $u = 3x + 7 \rightarrow u' = 3$

$v' = cosx \rightarrow v = senx$

Então

$$\int (3x+7)\,cosx\,dx = (\,3x+7).senx - \int 3.senxdx = (\,3x+7).senx + 3cosx + c$$

EXERCÍCIOS

4.3. Resolva as integrais:

a) $\int x.cosxdx$

b) $\int (2x-1).e^x\,dx$

Respostas:

a) xsenx + cosx +c ; b) $e^x(2x-3)+c$

ATIVIDADE

4.5. Resolva:

a) $\int lnxdx = \int 1. lnxdx$
Obs: Considere u = lnx e v' = 1

b) $\int t^2. e^t \, dt$
Obs: Aplique a regra duas vezes para finalizar a resolução.

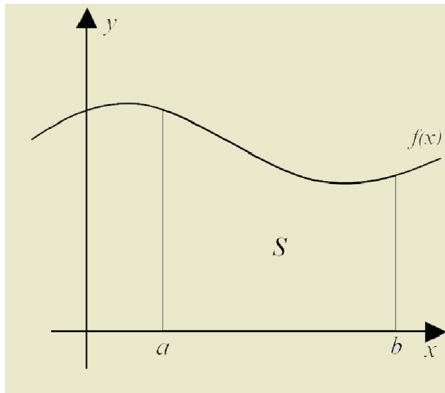
LISTA DE EXERCÍCIOS

4.5. Resolva as integrais:

a) $\int x. senxdx$
b) $\int (3x + 7). cosxdx$
c) $\int x. lnxdx$

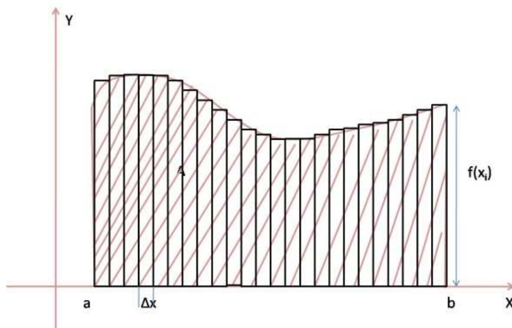
4.5. INTEGRAL DEFINIDA.

Seja uma função definida em um intervalo [a,b], com a seguinte representação gráfica:



O cálculo da área da figura formada pela curva e pelo eixo x no intervalo [a,b] não é imediato, em razão da curvatura apresentada na parte superior da figura.

Um modo aproximado de calcular essa área é dividir o intervalo [a,b] em pequenos intervalos, calcular a área de cada retângulo formado com essa divisão e depois somar todas essas áreas.



Quanto menor for a base de cada um dos retângulos (Δx) , menor será a diferença entre a área do retângulo e a área sob a curva.

A soma da área de todos os retângulos se escreve de forma abreviada na forma de um somatório.

$A \equiv \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta_i x$

No limite quando $\Delta_i x \rightarrow 0 \; e \; n \rightarrow \infty$, o cálculo se aproxima da INTEGRAL DE RIEMANN:

$$A \equiv \lim_{\Delta X \rightarrow 0 \; e \; n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}).\Delta_i x$$
$$= \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$Sendo$
$b > a\ e\ F\ uma\ primitiva\ de\ f\ no\ intervalo\ [a, b].$

Exemplos:

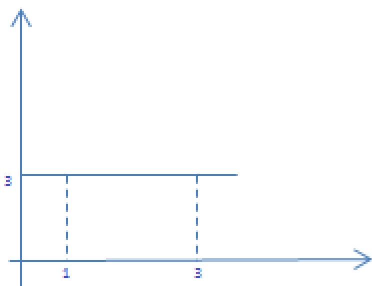
Calcular:

a) $\int_1^3 3dx$

F(b) = 3.3 + c = 9 + c

F(a) = 3.1 + c = 3 + c

F(b) – F(a) = 9 + c – 3 – c = 6



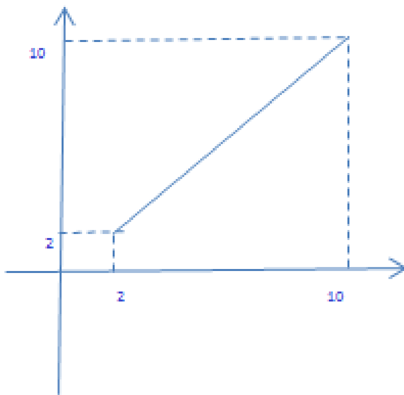
Área do retângulo = bxh = 2 x 3 =6

b) $\int_2^{10} xdx$

$$F(b) = \frac{10^2}{2} + c \ = 50 + c$$

$$F(a) = \frac{2^2}{2} + c = 2 + c$$

c) $\int_2^{10} xdx$ = F(b) – F(a) = 50-2 = 48



$$Área\ do\ trapézio = \frac{(B+b)}{2}.h = \frac{(10+2).8}{2} = 48$$

EXERCÍCIOS

4.4. Resolva as integrais:

a) $\int_0^5 (x^2 + 1)dx$

b) $\int_{-2}^0 (x^3 - \ e^x)dx$

Resp: a) $\frac{140}{3}$; $b) - 5 + e^{-2}$

ATIVIDADE

4.6. Resolva:

a) $\int_{1}^{10} 4dx$
b) $\int_{-1}^{1} e^{x} dx$

LISTA DE EXERCÍCIOS

4.6. Resolva as integrais:

a) $\int_{1}^{5} \frac{10}{x} dx$
b) $\int_{-\pi}^{\pi} cosxdx$
c) $\int_{0}^{4} \sqrt{x}\, dx$
d) $\int_{1}^{2} \frac{4}{x+1} dx$

4.6. CÁLCULO DE ÁREAS – APLICAÇÕES DA INTEGRAL DE RIEMANN.

Como já vimos, podemos calcular a área de figuras planas utilizando a Integral de Riemann. No entanto, é preciso tomar cuidado com o sinal da integral.

1º caso: A função é positiva no intervalo [a,b]

A área coincide exatamente com a integral da função no intervalo.

2º caso: A função é negativa no intervalo [a,b]

A área corresponde à integral com o sinal trocado. Ou seja, a área será sempre positiva.

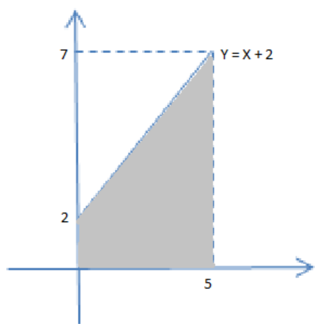
3º caso: A função troca de sinal no intervalo [a,b]

Neste caso, calculam-se separadamente as áreas das figuras acima e abaixo do eixo x, trocando o sinal da integral que corresponde à parte negativa da função.

Exemplos

Calcular a área das figuras:

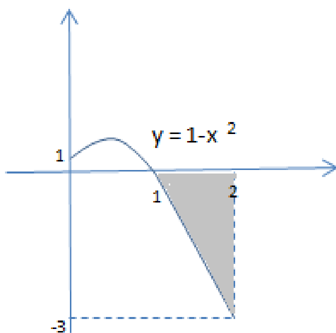
a)



$Área = \int_0^5 (x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 2x|_0^5 =$

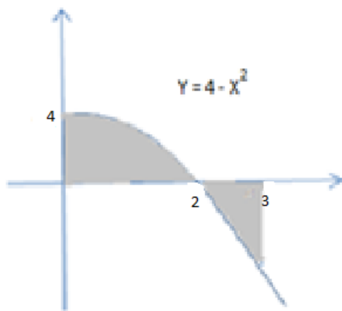
$\frac{25}{2} + 10 = \frac{45}{2}$

b)



$$Área = \int_{1}^{2} (1 - x^2)dx = (x - \frac{x^3}{3})\Big|_{1}^{2} = \frac{4}{3}$$

c)

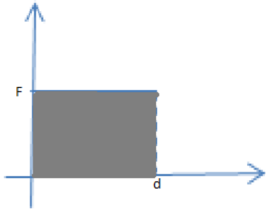


$$Área = \int_{0}^{2} (4 - x^2)dx + (-)\int_{2}^{3} (4 - x^2)dx = \frac{23}{3}$$

APLICAÇÕES

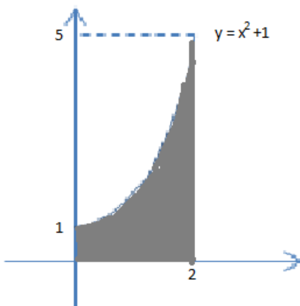
O cálculo da área através da integral definida, além de representar efetivamente uma área , pode também auxiliar na obtenção de resultados para grandezas expressas pelo produto de duas variáveis, como podemos facilmente encontrar na Física.

Um exemplo é o cálculo do trabalho, definido como sendo o produto da força pelo deslocamento, quando a força é aplicada no mesmo sentido do deslocamento. Se a força é constante fica fácil o cálculo da área do retângulo que se obtém no gráfico Fxd.



$$\tau = Fxd \ \equiv \text{área do retângulo}$$

Mas se a força varia, o cálculo da área pode ser obtido pelo cálculo da integral definida. Veja o gráfico abaixo:

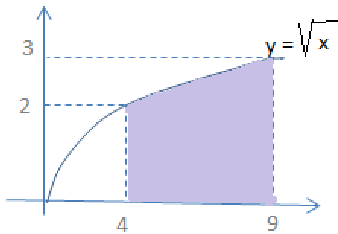


$\tau = \int_0^2 (x^2 + 1)dx = \frac{x^3}{3} + x \Big|_0^2 = \frac{14}{3}\ joules$, considerando que a força é dada em newtons e o deslocamento em metros.

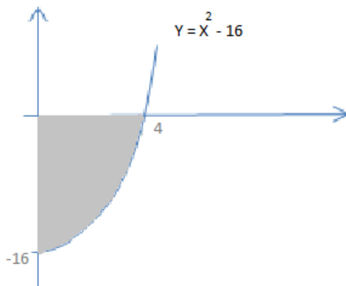
EXERCÍCIOS

4.5. Calcule a área das figuras:

a)



b)

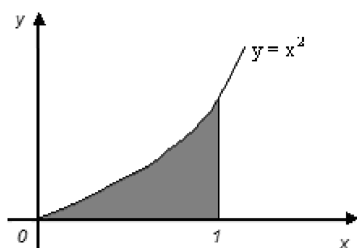


Respostas: a) $\frac{38}{3}$ *; b)*$\frac{128}{3}$

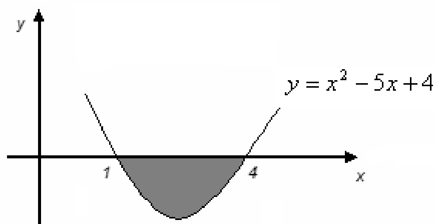
LISTA DE EXERCÍCIOS

4.7. Calcule a área das figuras:

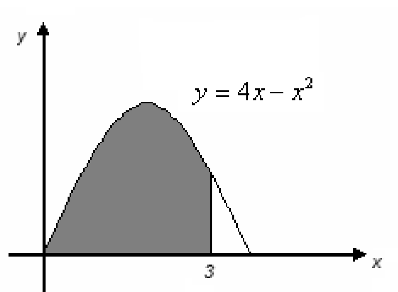
a)



b)



c)



5. DERIVADAS PARCIAIS.

5.1. FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS.

É comum encontrar funções de mais de uma variável para representar situações reais.

Muitas vezes são analisadas como as alterações de uma das variáveis podem afetar os valores das funções. Determinar a taxa de variação de uma função f em relação a uma de suas variáveis independentes é calcular as derivadas parciais.

Exemplo

a) Seja uma função fictícia, que determina a temperatura, medida em graus Celsius, em função da altitude, em metros e, do tempo, em horas:

$$T(t,h) = 0{,}5t^2 + 4t - 0{,}01h + 8$$

A derivada parcial faz uma análise da taxa de variação de uma variável, enquanto todas as demais se mantêm constantes:

Podemos querer saber como a temperatura varia em relação à altitude, para um instante t fixo, ou como a temperatura varia em relação ao tempo, para um ponto de altitude fixo.

De uma forma geral as primeiras derivadas parciais de $z = f(x,y)$ são denotadas por:

$$\frac{\partial z}{\partial x}; D_x; f_x(x, y)$$

Sendo que o símbolo ∂, às vezes pronunciado "del" ou "parcial" é utilizado em vez de dê.

Na função temperatura acima, temos $\frac{\partial T}{\partial h} = -0{,}01\ e\ \frac{\partial T}{\partial t} = 1.t + 4$.

Supondo para certo instante t = 10 h, temos uma taxa de variação da temperatura de -0,01 grau/m, enquanto para uma certa altitude h = 100m, a taxa de variação é de t + 4 grau /h.

b) seja a função $z = 2x - x^2y^2 + 4x^3y$.

Suas derivadas parciais são:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 2xy^2 + 12x^2y;\ \ e$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2yx^2 + 4x^3$$

EXERCÍCIO

5.1. Calcule as derivadas parciais $f(x,y) = x \, . \, e^{x^2y} \, no \; ponto \; (1, ln2)$

Resp: $\frac{\partial f}{\partial x}$ = *2(1 + 2ln2);* $\frac{\partial f}{\partial y} = 2$

LISTA DE EXERCÍCIOS

5.1. Calcule as derivadas parciais de $f(x,y)$

a) $f(x,y) = x^2 + 3y^2$

b) $f(x,y) = 2x^3 + y^2 + 2xy$

c) $f(x,y) = (x^2 + y^2)senx$

6. INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.

6.1. CONCEITO.

Neste livro, trataremos de uma maneira muito breve o que é uma equação diferencial e apenas uma técnica de solução, lembrando que em geral não há uma fórmula explícita para a solução de uma equação diferencial.

Para se interpretar e entender alguns fenômenos da natureza se faz necessário um modelo matemático para que se possa estudar o problema e muitas vezes predizer um comportamento futuro. Uma aplicação importante do cálculo para a modelagem matemática de um problema frequentemente tem a forma de uma equação diferencial.

Um dos exemplos mais citados para a utilização de uma equação diferencial é o crescimento ou decrescimento de populações.

A taxa de crescimento, por exemplo, de uma população de bactérias, no decorrer do tempo, pode ser proporcional ao tamanho da população:

$$\frac{dP}{dt} = KP, onde\ K = constante\ de\ proporcionalidade.$$

$$ou\ P' = KP$$

$$P\ pode\ ser\ uma\ função\ exponencial, pois\ a\ exponencial\ \text{é}\ uma\ função$$
$$cuja\ derivada\ \text{é}\ um\ múltiplo\ dela\ mesma$$

Então, P pode ser uma função do tipo $P = C.e^{Kt}$

6.2. SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL.

A solução de uma equação diferencial (E.D.) é qualquer função f que, substituída na equação diferencial, reduz a equação à uma identidade.

Exemplo: Seja a equação $y' + 5y = 0\ .A\ função\ y = e^{-5x}\ \text{é}\ uma\ solução\ , pois$

$$y' = -5.e^{-5x}. Substituindo\ na\ E.D., temos -5e^{-5x} + 5.e^{-5x} = 0.$$

Esta não é a única solução. Em geral, temos uma família de soluções. A solução desejada vai depender das condições de contorno do problema.

EXERCÍCIO

6.1. Mostre que a função $y = \ x^2$ é $solução\ para\ a\ E.D.\ \ x^2.y'' - 2y = 0$

6.2 Mostre que a função $y = x^3 + 9$ é $solução\ da\ E.D. y' = 3x^2$

6.3. RESOLUÇÃO PELO MÉTODO DA SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS.

Separa-se de um lado da equação os termos envolvendo x, e em outro os termos envolvendo y.

Exemplo:

Seja a E.D. $y' = 10\ y$.

Vamos escrever na forma $\frac{dy}{dx} = 10y$

Separando as variáveis: $\frac{dy}{y} = 10dx$

Agora vamos integrar os dois membros da equação:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 10dx$$

$$\ln|y| + c = 10x + c \rightarrow \ |y| = \ e^{10x+c} \rightarrow y = \ e^{10x+c}\ ou\ y = \ -e^{10x+c}$$

EXERCÍCIO

6.3. Resolva as Equações Diferenciais:

a) $y' = \frac{x}{y^2}$

b) $y' = 2x$

c) $y' + 5y = 0$

Resp: a) $y = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2}} + c$; $b)\ y = x^2 + c$; $c)\ |y| = e^{-5x+c}$ + c

Bibliografia

Boulos, P., *Cálculo Diferencial e Integral,* vol.1, São Paulo: Pearson Educations do Brasil Ltda, 1999.

Caldeira, A.M., Silva, L.M.O,Machado,M.A.S,Medeiros,V.Z.,*Pré-Cálculo,*2.ed.São Paulo:

Cengage Learning, 2010.

Flemming, D.M., Gonçalves, M.B., *Cálculo,* vol. A e B, São Paulo: Pearson Educations do Brasil Ltda, 2007.

Larson, R.,*Cálculo Aplicado,* Trad. All Tasks, São Paulo: Cengage Learning, 2011.

Leite, A., *Aplicações da Matemática, Administração, Economia e Ciências Contábeis*. 2.ed.São Paulo:Cengage Learning,2016.

Silva, S. M., Silva.,E.M., Silva, E.M., *Matemática : para os cursos de economia, administração, ciências contábeis.*6.ed.,São Paulo: Atlas, 2010.

Stewart,J.,*Cálculo,*Vol.1,6.ed.Trad.Antonio Carlos Moretti, São Paulo: Cengage Learning, 2010.